

## SOLUÇÃO ANALÍTICA DE UM PROBLEMA PLANIMÉTRICO EM UMA ÁREA AGRÍCOLA DE PETROLINA-PE

SANTIAGO, Edgo Jackson Pinto<sup>1</sup>  
SILVA, Cleomacio Miguel da<sup>2</sup>  
CRUZ, Sóstenes Rommell<sup>3</sup>

Recebido em: 2018.05.29

Aprovado em: 2018.08.06

ISSUE DOI: 10.3738/1982.2278.2996

**RESUMO:** A geometria tem desempenhado função importante no processo ensino e aprendizagem da matemática, buscando sempre interações entre a abstração e a realidade. Nessa constante busca, foram descobertas diferentes tipos de formas geométricas, que mesmo não sendo formas simétricas ajudaram os alunos a compreender melhor a realidade que os cercam. Figura geométrica como a cardióide, elipsóide e outras mais, desperta a curiosidade dos alunos, fazendo com que estes busquem a geometria, não como algo sem aplicação, mas como suporte para resolver problemas práticos, que aparentemente, não teriam soluções. As áreas de plantio dos pólos de irrigação da cidade de Petrolina, localizada no sertão pernambucano, são construídas na forma geométrica de círculos concêntricos, cuja finalidade é aproveitar melhor a água. Para que isto aconteça é necessário o conhecimento exato da área correspondente de cada divisão. Entretanto, nem sempre é possível obter áreas exatas. Geralmente, aparecem áreas de figuras não simétricas. Foi observando figuras não simétricas formadas nas áreas de irrigação da cidade de Petrolina, que surgiu a proposta apresentada no presente trabalho. A forma geométrica encontrada foi batizada de folhóide devido à sua semelhança com uma folha. Assim, dentro desse contexto, o objetivo do presente estudo foi apresentar a equação matemática da folhóide. Para tanto, utilizou-se dos conceitos de geometria básica, geometria analítica e geometria diferencial. A solução obtida dará suporte matemático para que figuras geométricas semelhantes sejam também estudadas.

**Palavras-chave:** Agricultura Irrigada. Modelagem Matemática. Geometria.

## ANALYTICAL SOLUTION OF A PLANIMETRIC PROBLEM IN AN AGRICULTURAL AREA OF PETROLINA-PE

**SUMMARY:** Geometry has played an important role in the teaching-learning process of mathematics, always seeking interactions between abstraction and reality. In this constant search, different types of geometric forms were discovered, which, even though they were not symmetrical shapes, helped students to better understand the reality that surrounds them. A geometric figure such as the cardioid, ellipsoid and more, arouses students' curiosity, making them look for geometry, not as something without application, but as a support to solve practical problems, which apparently would have no solutions. The planting areas of the irrigation poles of the city of Petrolina, located in the backlands of Pernambuco, are built in the geometric form of concentric circles, whose purpose is to make better use of water. For this to happen, exact knowledge of the corresponding area of each division is necessary. However, it is not always possible to get exact areas. Generally, areas of non-symmetrical figures appear. It was observed non-symmetrical figures formed in the areas of irrigation of the city of Petrolina, that the proposal presented in the present work arose. The geometric shape found was called folholoid because of its resemblance to a leaf. Thus, within this context, the objective of the present study was to present the mathematical equation of folholoid. For that, the concepts of basic geometry, analytical geometry and differential geometry were used. The solution obtained will give mathematical support so that similar geometric figures are also studied.

**Keywords:** Irrigation Agriculture. Mathematical Modeling. Geometry.

<sup>1</sup> Universidade Federal Rural de Pernambuco. Departamento de Biometria e Estatística Aplicada.

<sup>2</sup> Escola Politécnica da Universidade de Pernambuco. Departamento de Biologia.

<sup>3</sup> Instituto Federal do Sertão de Pernambuco. Departamento de Matemática

## INTRODUÇÃO

A geometria encontra-se em nosso dia a dia em situações muitas vezes apercebidas. Ela é um ramo da matemática preocupado com as questões de forma, tamanho, posição relativa dos números, e as propriedades do espaço, sendo estudada desde a antiguidade. Inicialmente, foi utilizada para calcular comprimentos, áreas e volumes (HEATH, 2013). A introdução de coordenadas por René Descartes e do desenvolvimento simultâneo da álgebra marcou uma nova etapa para a geometria, uma vez que figuras geométricas, tais como curvas planas, agora podia ser representado analiticamente, ou seja, com funções e equações. Esta desempenhou um papel fundamental no surgimento do cálculo infinitesimal no século 17 (HEATH, 2013). Além disso, a teoria da perspectiva mostrou que há mais para a geometria do que apenas as propriedades métricas das figuras: A perspectiva é a origem da geometria projetiva. Objeto de geometria foi enriquecido com o estudo da estrutura intrínseca de objetos geométricos que se originou com Euler e Gauss e levou à criação de topologia e geometria diferencial (HEATH, 2013).

Estamos rodeados de espaço e das formas das coisas, ou seja, tudo ao nosso redor e derredor é geometria pura. O planeta em que vivemos encontra-se situado em um universo cheio de estrelas e rodeado por outros planetas. Todos eles têm diferentes formas e tamanhos. Para ser capaz de entender a maravilha das formas geométricas, precisamos ser capazes de entender e ter conhecimento do uso do espaço. Quando sabemos como aplicar e entender a relação entre as formas e tamanhos, estaremos melhor preparados para usá-los em nossa vida cotidiana. A geometria irá nos ajudar a fazer isso, porque fornece o conhecimento de como lidar com as medições e as relações de linhas, ângulos, superfícies e sólidos (HEATH, 2013).

Algumas pessoas pensam em formas e tamanhos, outros pensam com habilidades visuais. Ao visualizar precisamos da compreensão da geometria para ser capaz de fazer isso. Sua imaginação é como uma fonte inexplorada de objetos, onde todos precisam se unir em um quadro maior. Diversas áreas científicas e tecnológicas exigem o conhecimento da geometria, principalmente nas áreas de estudo mais avançados, onde o conhecimento é essencial para se obter a excelência. A geometria tem muitas aplicações práticas na vida cotidiana (HEATH, 2013). Estimar alturas de objetos, encontrar distâncias e calcular áreas e volumes são comuns. Um dos teoremas fundamentais da geometria, o Teorema de Pitágoras, nos permite fazer muitos destes cálculos (HEATH, 2013).

Os alunos não têm a capacidade de compreender a importância de um tópico, se ele não tem valor para eles (D'AMBROSIO, 1989). Daí surge a pergunta: Por que é importante estudar a geometria? A geometria é uma ciência importante que não só influencia um grande número de outras ciências, mas a vida cotidiana também (GRAVINA; SANTAROSA, 1998). As pessoas precisam aprender geometria devido à forma como isso nos afeta no dia-a-dia. Ter uma compreensão de construções geométricas nos ajuda a entender melhor o mundo que nos rodeia. Quando se está jogando futebol ou pilotando uma nave espacial, utiliza-se os princípios da geometria para orientar a tomada de decisão. Em Arquitetura e na Engenharia, a geometria é de fundamental importância (OGLIARI, 2007).

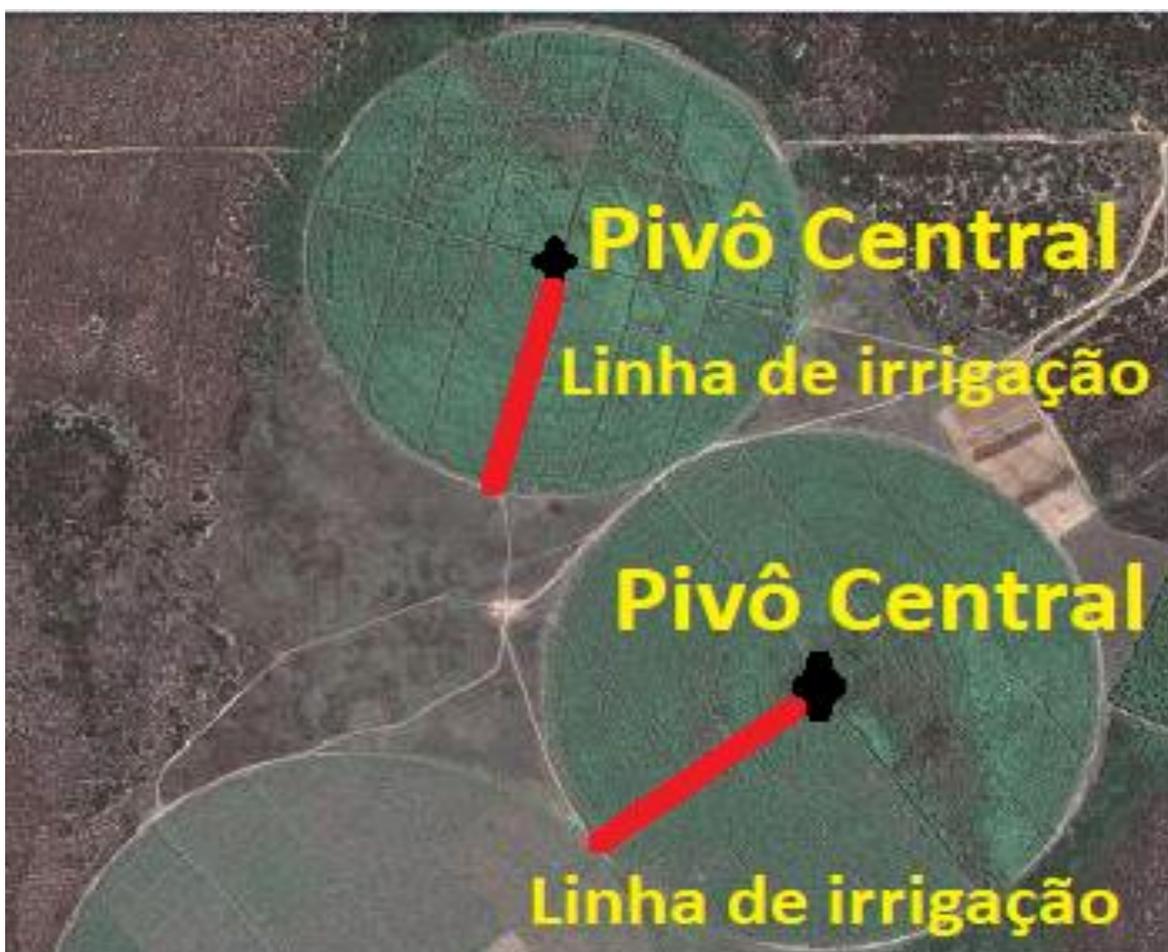
Nos pólos de irrigação da cidade de Petrolina, no sertão pernambucano, as áreas de plantio são construídas na forma geométrica de círculos concêntricos. Tais formas geométricas facilitam significativamente, o aproveitamento da água (CORREIA; ARAÚJO; CAVALCANTI, 2000). Em clima semiárido onde a evapotranspiração supera a precipitação na maior parte do ano, a irrigação é de fundamental importância para que a produção vegetal seja economicamente possível e viável. Irrigar consiste em fornecer água de modo a dar condições plenas para que os estômatos das células vegetais permaneçam abertos produzindo ao máximo e com o menor dispêndio energético possível. Dentre os sistemas de irrigação utilizados, existe o sistema por Pivô central que é um sistema constituído por uma linha móvel de aspersão, sustentada por

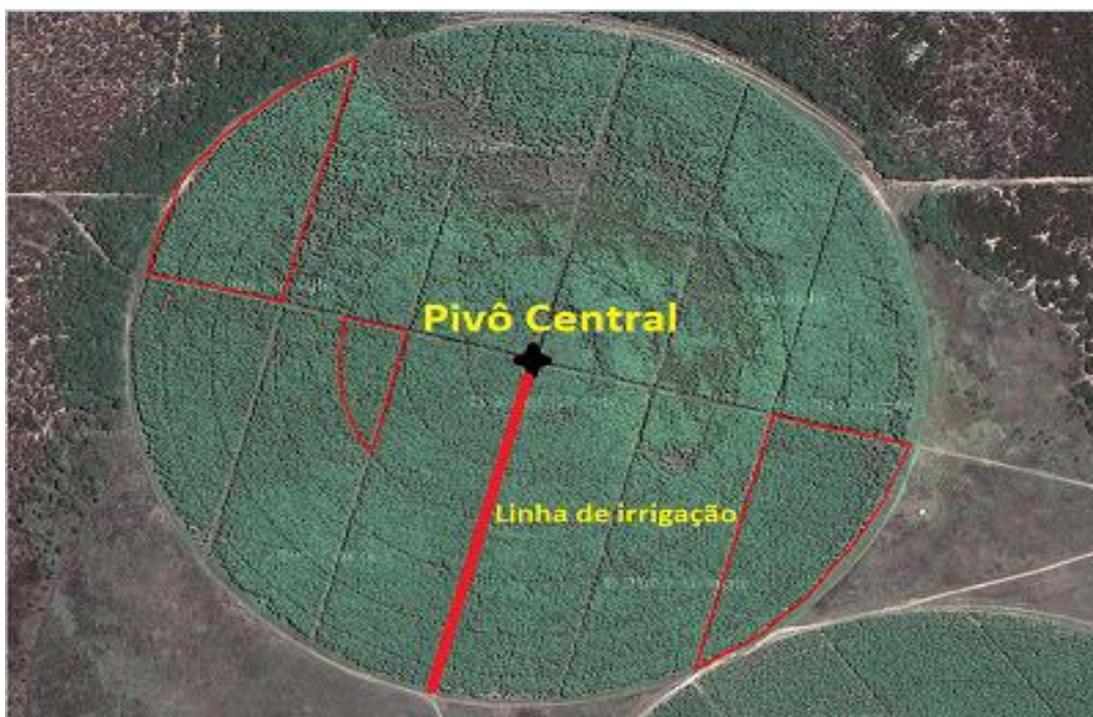
torres metálicas que giram descrevendo movimentos concêntricos em torno de um ponto central fixo denominado de pivô. Assim, o equipamento irriga uma área circular, que pode atingir até 200 hectares (CORREIA; ARAÚJO; CAVALCANTI, 2000). Para que haja bom aproveitamento de água, faz-se necessário obter áreas exatas. Entretanto, nem sempre isto é possível (CORREIA; ARAÚJO; CAVALCANTI, 2000). Frequentemente aparecem áreas de figuras não simétricas. Foi observando exatamente as figuras não simétricas formadas nas áreas de irrigação da cidade de Petrolina, que surgiu a proposta deste trabalho. A forma geométrica encontrada foi batizada de folhóide devido à sua similaridade geométrica com uma folha. Assim, dentro desse contexto, o objetivo deste estudo é encontrar a equação matemática da folhóide.

## FIGURAS GEOMÉTRICAS EM ÁREAS DE IRRIGAÇÃO

A Figura 1 mostra a forma geométrica dos círculos concêntricos utilizadas nas áreas irrigadas por pivô central nos pólos de irrigação da cidade de Petrolina. Para facilitar o escoamento da produção agrícola e o manejo de um modo geral, costuma-se dividir essa área circular em subáreas menores. As vias de acesso a essas subáreas são denominadas de carregadores secundários, sendo que os carregadores que coincide com o diâmetro da circunferência são chamados de carregadores principais. A Figura 2 mostra o sistema de carreador principal e carreador secundário.

**Figura 1** - Imagem de satélite de área irrigada por pivô central



**Figura 2** - Sistema com carreador principal e secundário**Figura 3** - Figuras não simétricas formadas nas áreas de irrigação

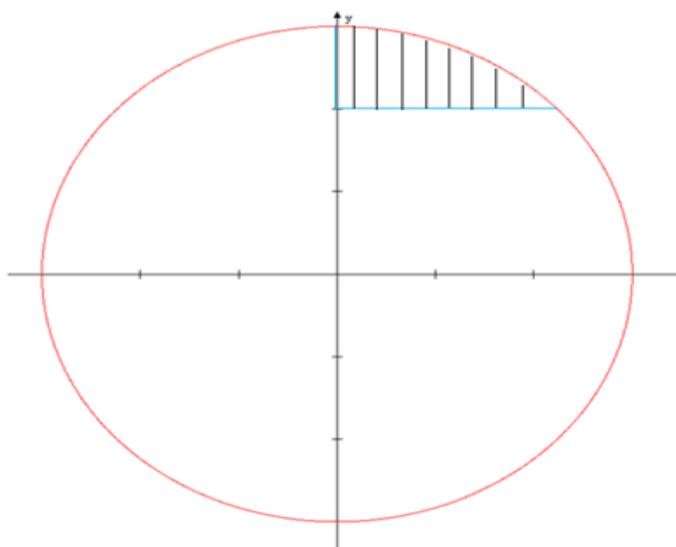
Muitas vezes por ocasião de replantio, determinação da densidade de plantas numa subárea, estimativa de produção ou até mesmo para o cálculo de adubação, torna-se importante o conhecimento exato da área correspondente a cada divisão realizada no círculo. Sendo assim, decorre de imediato um problema. Durante a divisão aparecem figuras geométricas não simétricas, como pode ser observado na Figura 3. Logo, surge a pergunta: como calcular a área dessas figuras?

## FIGURAS NÃO SIMÉTRICAS EM ÁREAS DE IRRIGAÇÃO

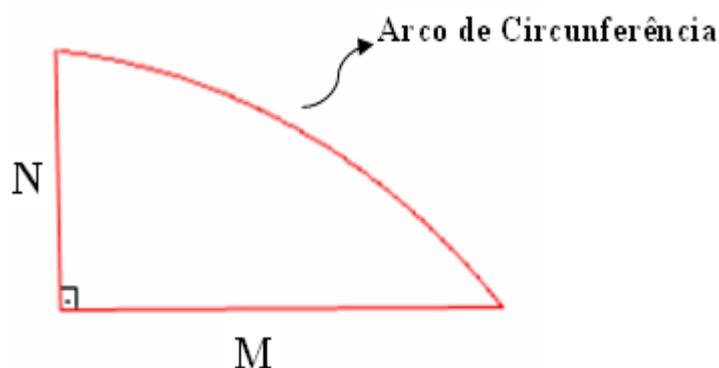
Para calcular áreas de formas geométricas como aquelas apresentadas na Figura 3, utilizam-se métodos matemáticos com divisão em figuras cujas áreas são conhecidas bem, com a utilização do cálculo Integral. No caso do cálculo, a solução da integral fornece a área de toda região do círculo compreendida entre os limites de integração. De acordo com a Figura 3, observa-se que as figuras não simétricas se encontram sob arcos de circunferências e possui duas dimensões sendo uma maior que a outra. Sua localização no círculo é peculiar, pois compreende apenas uma porção do círculo limitado entre um intervalo qualquer, além disso, podemos encontrar figuras semelhantes a ela em qualquer parte do círculo. O cálculo das áreas dessas facilitará os trabalhos planimétricos no setor agrícola.

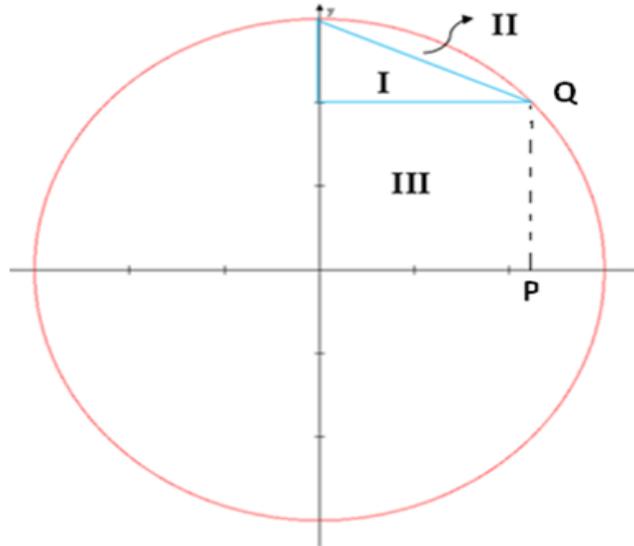
Consideremos uma forma geométrica como aquela que aparece na Figura 3. Tomemos como modelo básico, a Figura 4 construída sobre o eixo dos  $y$  e numa circunferência de raio  $R$  e centro na origem  $(0;0)$ . A área a ser determinada é a área hachurada. Separando a área hachurada, obtemos a Figura 5, onde  $N$  e  $M$  são dimensões da figura, com  $M > N$ . Para determinar a área da figura hachurada utilizou-se o procedimento analítico de separação por áreas, conforme apresentado na Figura 6.

**Figura 4** - Representação gráfica de uma superfície não simétrica



**Figura 5** - Representação geométrica da superfície não simétrica.



**Figura 6** - Representação gráfica por separação de áreas

A equação da circunferência com centro na origem (0;0) é dado pela equação:  $X^2 + Y^2 = R^2 \longleftrightarrow Y = \sqrt{R^2 - X^2}$ . Integrando essa equação de 0 a M, o resultado será a soma das áreas I, II e III. Logo, a área da figura hachurada é a soma das áreas I e II, que foi calculada pela Equação 1, cuja solução fornece a Equação 2.

$$\int_0^M \sqrt{R^2 - X^2} dx - M(R - N) \quad (1)$$

$$= \int_0^M \sqrt{R^2 - X^2} dx - M(R - N)$$

ARTIFÍCIO :  $X = R \text{sen}\theta \longleftrightarrow dx = R \cos \theta d\theta$

Não mudemos os limites de integração, pois voltaremos à variável X

$$\int \sqrt{R^2 - (R \text{sen}\theta)^2} (R \cos \theta) d\theta - M(R - N) \longrightarrow \int R^2 \sqrt{(\cos \theta)^2} (\cos \theta) d\theta - M(R - N)$$

$$\int R^2 \cos^2 \theta d\theta - M(R - N)$$

Resolvamos primeiramente a Integral, temos que:

$$\int R^2 \cos^2 \theta d\theta = R^2 \left[ \frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen}2\theta}{4} \right] = R^2 \left[ \frac{\theta}{2} + \frac{2\text{sen}\theta \cdot \cos \theta}{4} \right]$$

Voltando à variável X para substituir os limites de Integração.

$$X = R \text{sen}\theta \longleftrightarrow \text{sen}\theta = \frac{X}{R} \rightarrow \theta = \text{arcsen}\left(\frac{X}{R}\right)$$

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \longleftrightarrow \cos \theta = \sqrt{1 - \frac{X^2}{R^2}}$$

$$\int_0^M \sqrt{R^2 - X^2} dx = R^2 \left[ \frac{\text{arcsen}\left(\frac{X}{R}\right)}{2} + \frac{X}{R} \frac{\sqrt{1 - \frac{X^2}{R^2}}}{2} \right]_0^M = \frac{R^2}{2} \left[ \left( \frac{\text{arcsen}\left(\frac{M}{R}\right)}{2} + \frac{M}{R} \frac{\sqrt{1 - \frac{M^2}{R^2}}}{2} \right) - (0 - 0) \right]$$

$$\int_0^M \sqrt{R^2 - X^2} dx = \frac{R^2}{2} \left[ \frac{\text{arcsen}\left(\frac{M}{R}\right)}{2} + \frac{M}{R} \frac{\sqrt{1 - \frac{M^2}{R^2}}}{2} \right]$$

$$= \int_0^M \sqrt{R^2 - X^2} dx - M(R - N) = \frac{R^2}{2} \left[ \frac{\arcsen\left(\frac{M}{R}\right)}{\frac{M}{R}} + \frac{M \sqrt{1 - \frac{M^2}{R^2}}}{R} \right] - M(R - N) \quad (2)$$

Como queremos a área em função das dimensões fornecidas, temos que colocar R em função de M e N. Observa-se que o ponto Q na Figura 6 tem como coordenadas Q (M; R-N). Colocando-se esse ponto na equação da circunferência, obtemos a Equação 3. Substituindo a Equação 3 na Equação 2, obtemos a Equação 4.

$$X^2 + Y^2 = R^2 \longrightarrow M^2 + (R - N)^2 = R^2 \longleftarrow M^2 + R^2 - 2NR + N^2 = R^2$$

$$R = \frac{M^2 + N^2}{2N} \quad (3)$$

$$\int_0^M \sqrt{R^2 - X^2} dx - M(R - N) = \frac{R^2}{2} \left[ \frac{\arcsen\left(\frac{M}{R}\right)}{\frac{M}{R}} + \frac{M \sqrt{1 - \frac{M^2}{R^2}}}{R} \right] - M(R - N)$$

$$= \frac{\left(\frac{M^2 + N^2}{2N}\right)^2}{2} \left[ \frac{\arcsen\left(\frac{M}{\frac{M^2 + N^2}{2N}}\right)}{\frac{M}{\frac{M^2 + N^2}{2N}}} + \frac{\frac{M}{\frac{M^2 + N^2}{2N}} \sqrt{1 - \frac{M^2}{\left(\frac{M^2 + N^2}{2N}\right)^2}}}{\frac{M^2 + N^2}{2N}} \right] - M\left(\frac{M^2 + N^2}{2N} - N\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{M^2 + N^2}{2N}\right)^2}{2} \left[ \frac{\arcsen\left(\frac{2MN}{M^2 + N^2}\right)}{\frac{2MN}{M^2 + N^2}} + \frac{2MN \sqrt{1 - \left(\frac{2MN}{M^2 + N^2}\right)^2}}{M^2 + N^2} \right] - M\left(\frac{M^2 - N^2}{2N}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{M^2 + N^2}{2N}\right)^2}{2} \left[ \frac{\arcsen\left(\frac{2MN}{M^2 + N^2}\right)}{\frac{2MN}{M^2 + N^2}} + \frac{2MN \sqrt{\frac{(M^2 + N^2)^2 - (2MN)^2}{(M^2 + N^2)^2}}}{M^2 + N^2} \right] - M\left(\frac{M^2 - N^2}{2N}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{M^2 + N^2}{2N}\right)^2}{2} \left[ \frac{\arcsen\left(\frac{2MN}{M^2 + N^2}\right)}{\frac{2MN}{M^2 + N^2}} + \frac{2MN \sqrt{M^4 + 2M^2N^2 + N^4 - 4M^2N^2}}{(M^2 + N^2)^2} \right] - M\left(\frac{M^2 - N^2}{2N}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{M^2 + N^2}{2N} \right)^2 \frac{\arcsen\left(\frac{2MN}{M^2 + N^2}\right)}{\frac{M^2 + N^2}{2N}} + \frac{M \sqrt{(M^2 - N^2)^2}}{2N} \right] - M \left( \frac{M^2 - N^2}{2N} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{M^2 + N^2}{2N} \right)^2 \frac{\arcsen\left(\frac{2MN}{M^2 + N^2}\right)}{\frac{M^2 + N^2}{2N}} + \frac{M(M^2 - N^2)}{2N} \right] - M \left( \frac{M^2 - N^2}{2N} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{M^2 + N^2}{2N} \right)^2 \frac{\arcsen\left(\frac{2MN}{M^2 + N^2}\right)}{\frac{M^2 + N^2}{2N}} + \frac{M(M^2 - N^2)}{4N} - M \left( \frac{M^2 - N^2}{2N} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{M^2 + N^2}{2N} \right)^2 \frac{\arcsen\left(\frac{2MN}{M^2 + N^2}\right)}{\frac{M^2 + N^2}{2N}} + \frac{M(M^2 - N^2) - 2M(M^2 - N^2)}{4N} \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{M^2 + N^2}{2N} \right)^2 \frac{\arcsen\left(\frac{2MN}{M^2 + N^2}\right)}{\frac{M^2 + N^2}{2N}} - \frac{M(M^2 - N^2)}{4N} \\
&= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{M^2 + N^2}{2N} \right)^2 \frac{\arcsen\left(\frac{2MN}{M^2 + N^2}\right)}{\frac{M^2 + N^2}{2N}} - \frac{M(M^2 - N^2)}{2N} \right]
\end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \int_0^M \sqrt{R^2 - X^2} dx - M(R - N) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{M^2 + N^2}{2N} \right)^2 \frac{\arcsen\left(\frac{2MN}{M^2 + N^2}\right)}{\frac{M^2 + N^2}{2N}} - \frac{M(M^2 - N^2)}{2N} \right] \quad (4)$$

Para simplificar a Equação 4, façamos:

$$\begin{cases} \frac{M^2 + N^2}{2N} = P \\ \frac{M^2 - N^2}{2N} = q \end{cases}$$

Donde vem que :

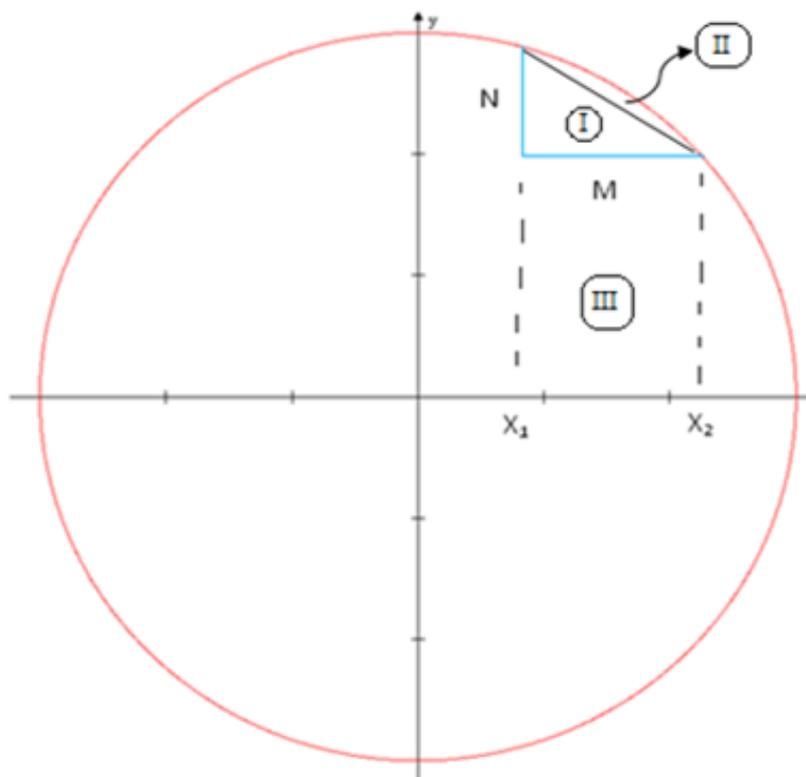
$$\begin{cases} \frac{M^2 + N^2}{2N} = P = R \rightarrow \left( \frac{M^2 + N^2}{2N} \right)^2 = p^2 \rightarrow \frac{M^4 + 2M^2N^2 + N^4}{4N^2} \\ \frac{M^2 - N^2}{2N} = q \rightarrow \left( \frac{M^2 - N^2}{2N} \right)^2 = q^2 \rightarrow \frac{M^4 - 2M^2N^2 + N^4}{4N^2} \end{cases} \rightarrow p^2 - q^2 = M^2$$

Substituindo os valores de P e Q na Equação 4, obtemos a Equação 5.

$$\int_0^M \sqrt{R^2 - X^2} dx - M(R - N) = \frac{1}{2} \left[ p^2 \arcsen\left(\frac{M}{P}\right) - Mq \right] \quad (5)$$

Para obter a Equação 5, partimos de um modelo básico mostrado na Figura 4. Agora vamos supor que figura não simétrica esteja em qualquer parte interior à mesma circunferência de raio R e centro na origem C (0;0), conforme mostrado na Figura 7.

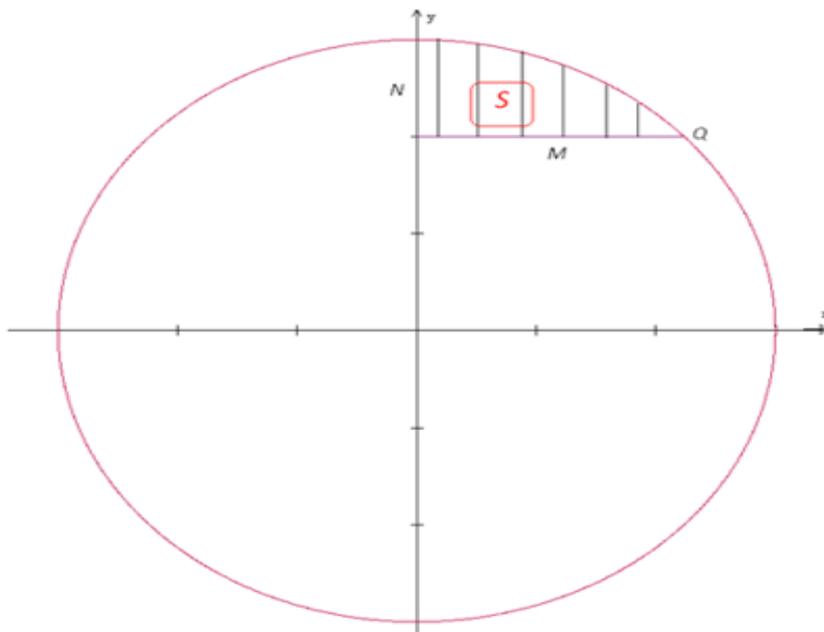
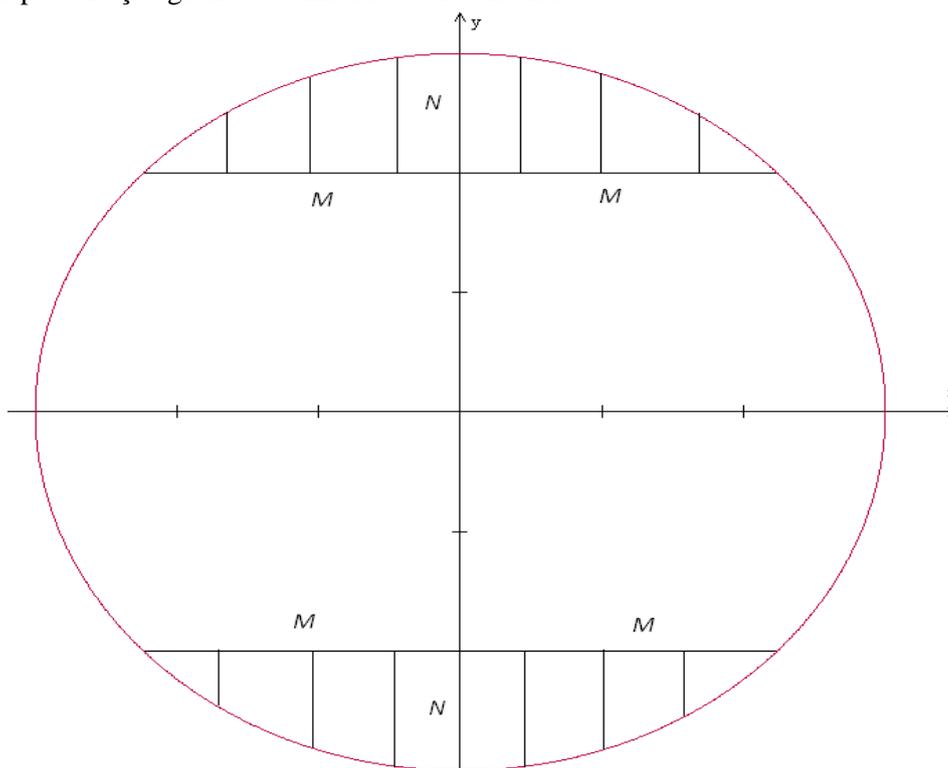
**Figura 7** - Representação gráfica por separação de áreas (nova posição de simetria)



Da Figura 7, temos,  $\int_{X_1}^{X_2} \sqrt{R^2 - X^2} dx - M(R - N)$ . Na Figura 7, temos  $X_2 - X_1 = M$ . Se fizermos  $X_1 \rightarrow 0$ , então,  $X_2 \rightarrow M$ . Logo,  $\int_{X_1}^{X_2} \sqrt{R^2 - X^2} dx - M(R - N) = \text{Área da figura não simétrica}$ . Portanto, a área de qualquer figura semelhante ao do problema proposto, determinada em função de suas dimensões, será sempre calculada pela Equação 5.

## EQUAÇÕES MATEMÁTICAS DA FOLHÓIDE

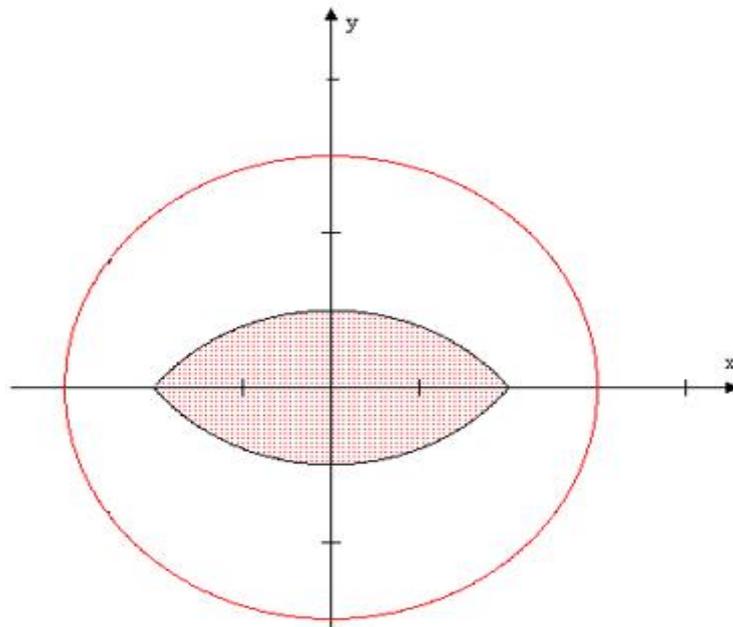
Consideremos a Figura 8 com uma área hachurada S. Por simetria da área S obtemos a Figura 9.

**Figura 8** - Representação gráfica de uma área hachurada S**Figura 9** - Representação gráfica da simetria da área hachurada S

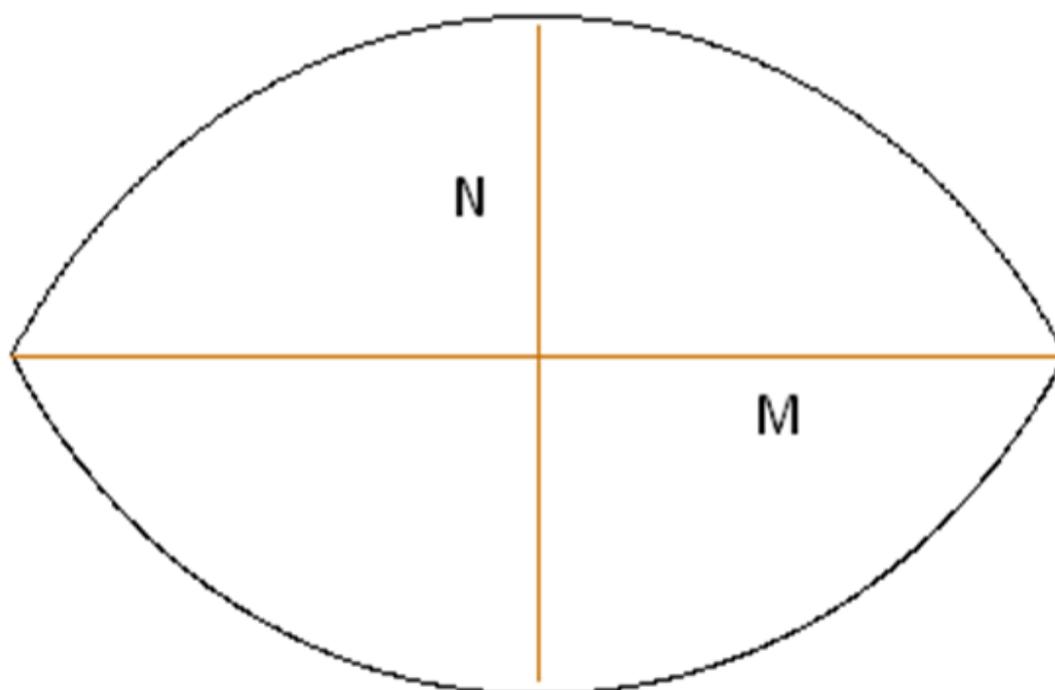
Quando unirmos as figuras simetrizadas, de modo a fazer com que o centro da circunferência passe a ser o centro da figura geométrica a ser gerada, obtemos a forma geométrica apresentada na Figura 10. A forma geométrica formada pela simétrica da área hachurada S, conforme mostra a Figura 10, foi denominada de folhóide, devido à sua semelhança com uma folha. Pelo fato da folhóide ter sido construída sob arcos de circunferência, é possível que haja uma relação entre a equação da circunferência e todos os pontos estabelecidos sob essa figura e a região interior a ela, ou seja, a superfície plana gerada.

Isolando a folhóide em relação às dimensões  $M$  e  $N$ , obtemos a Figura 11. Consideremos a Figura 8 e suponhamos que a circunferência seja de raio  $R$  e tenha centro na origem. Dividindo a Figura 9 em folhóide superior e folhóide inferior, obtemos a Figura 12.

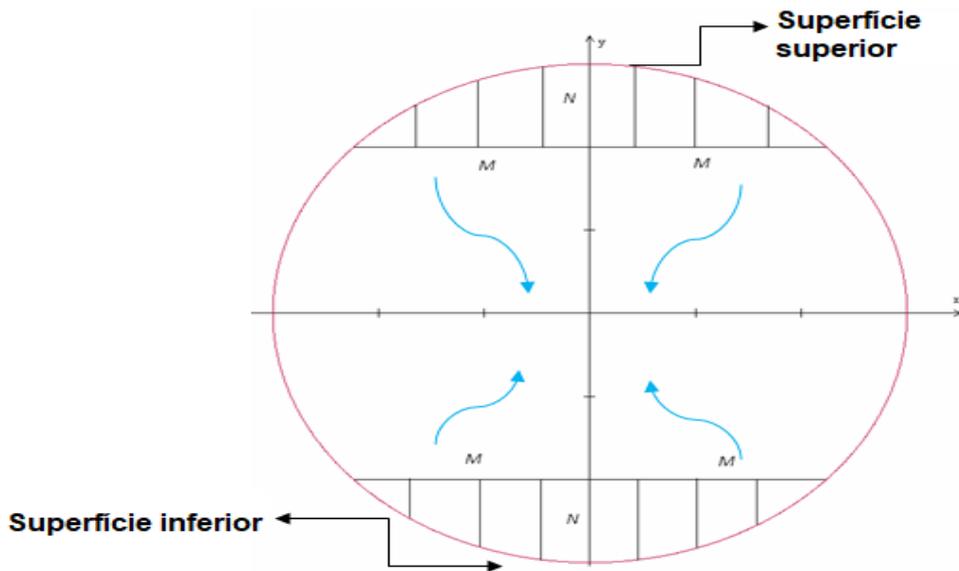
**Figura 10** - Forma geométrica formada pela simétrica da área hachurada  $S$



**Figura 11** - A folhóide em relação às dimensões  $N$  e  $M$ .



**Figura 12** - Representação gráfica da semi-folhóide superior e semi-folhóide inferior numa circunferência de centro (0;0).



O centro da folhóide superior é  $(0; R - N)$  e o da Folhóide inferior é  $(0; -R - (-N)) = (0; -R + N)$ . A equação da circunferência de centro na origem é dada por:  $X^2 + Y^2 = R^2$ . Mas,  $R$  pode ser expresso em função de  $M$  e  $N$  pela Equação 3. Colocando o ponto correspondente no centro da folhóide superior na equação da circunferência, obtemos a Equação 6.

$$E_C = (X - X_c)^2 + (Y - Y_c)^2 = R^2 \longrightarrow (X - 0)^2 + (Y - (R - N))^2 = R^2 \rightarrow$$

$$X^2 + \left( Y - \frac{M^2 + N^2}{2N} - N \right)^2 = \left( \frac{M^2 + N^2}{2N} \right)^2$$

$$X^2 + \left( Y - \left( \frac{M^2 - N^2}{2N} \right) \right)^2 = \left( \frac{M^2 + N^2}{2N} \right)^2 \rightarrow$$

$$X^2 + Y^2 - \frac{Y}{N}(M^2 - N^2) + \left( \frac{M^2 - N^2}{2N} \right)^2 = \left( \frac{M^2 + N^2}{2N} \right)^2$$

$$X^2 + Y^2 - \frac{Y}{N}(M^2 - N^2) = \left( \frac{M^2 + N^2}{2N} \right)^2 - \left( \frac{M^2 - N^2}{2N} \right)^2$$

$$X^2 + Y^2 - \frac{Y}{N}(M^2 - N^2) = \frac{M^4 + 2M^2N^2 + N^2 - M^4 + 2M^2N^2 - N^4}{4N^2}$$

$$X^2 + Y^2 - \frac{Y}{N}(M^2 - N^2) = M^2$$

$$X^2 + Y^2 = M^2 + \frac{Y}{N}(M^2 - N^2) \text{ Multipliquemos por: } \frac{2}{2}$$

$$X^2 + Y^2 = M^2 + 2Y \left( \frac{M^2 - N^2}{2N} \right) \quad \text{Substituíamos } \left( \frac{M^2 - N^2}{2N} \right) = q$$

$$\therefore X^2 + Y^2 = M^2 + 2Yq \quad (6)$$

Agora colocando o ponto correspondente no centro da folhóide inferior na equação da circunferência, obtemos a Equação 7.

$$E_C = (X - X_c)^2 + (Y - Y_c)^2 = R^2 \longrightarrow (X - 0)^2 + (Y - (-R + N))^2 = R^2$$

$$X^2 + \left( Y - \left( -\left( \frac{M^2 + N^2}{2N} \right) + N \right) \right)^2 = \left( \frac{M^2 + N^2}{2N} \right)^2$$

$$X^2 + \left( Y - \left( \frac{-N^2 - M^2}{2N} + N \right) \right)^2 = \left( \frac{M^2 + N^2}{2N} \right)^2$$

$$X^2 + \left( Y - \left( \frac{N^2 - M^2}{2N} \right) \right)^2 = \left( \frac{M^2 + N^2}{2N} \right)^2$$

$$X^2 + Y^2 - 2Y \left( \frac{N^2 - M^2}{2N} \right) + \left( \frac{N^2 - M^2}{2N} \right)^2 = \left( \frac{M^2 + N^2}{2N} \right)^2$$

$$X^2 + Y^2 - 2Y \left( \frac{N^2 - M^2}{2N} \right) = \left( \frac{M^2 + N^2}{2N} \right)^2 - \left( \frac{N^2 - M^2}{2N} \right)^2$$

$$X^2 + Y^2 - 2Y \left( \frac{N^2 - M^2}{2N} \right) = \frac{M^4 + 2M^2N^2 + N^4 - N^4 + 2M^2N^2 - M^4}{4N^2}$$

$$X^2 + Y^2 - 2Y \left( \frac{N^2 - M^2}{2N} \right) = M^2$$

$$X^2 + Y^2 = M^2 + 2Y \left( \frac{N^2 - M^2}{2N} \right)$$

$$X^2 + Y^2 = M^2 - 2Y \left( \frac{M^2 - N^2}{2N} \right)$$

Sabemos que  $\frac{M^2 - N^2}{2N} = q$  Logo

$$\therefore X^2 + Y^2 = M^2 - 2Yq \quad (7)$$

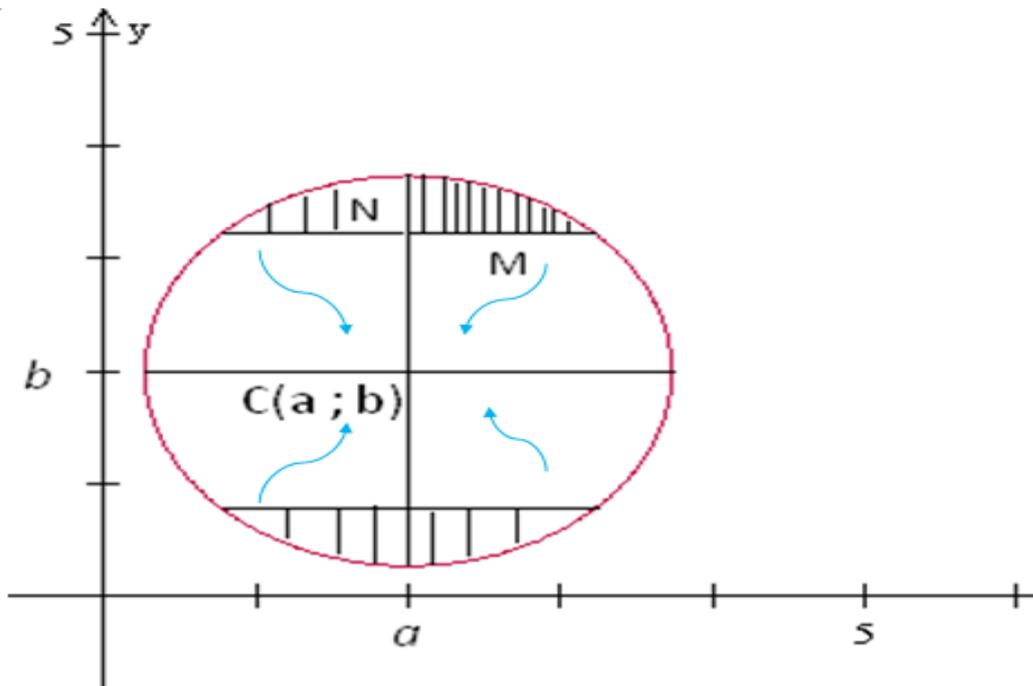
As Equações 6 e 7 juntas fornecem todos os pontos da folhóide. Assim, a equação final da folhóide é calculada pela Equação 8.

$$E_F \rightarrow X^2 + Y^2 = M^2 \pm 2Yq \quad (8)$$

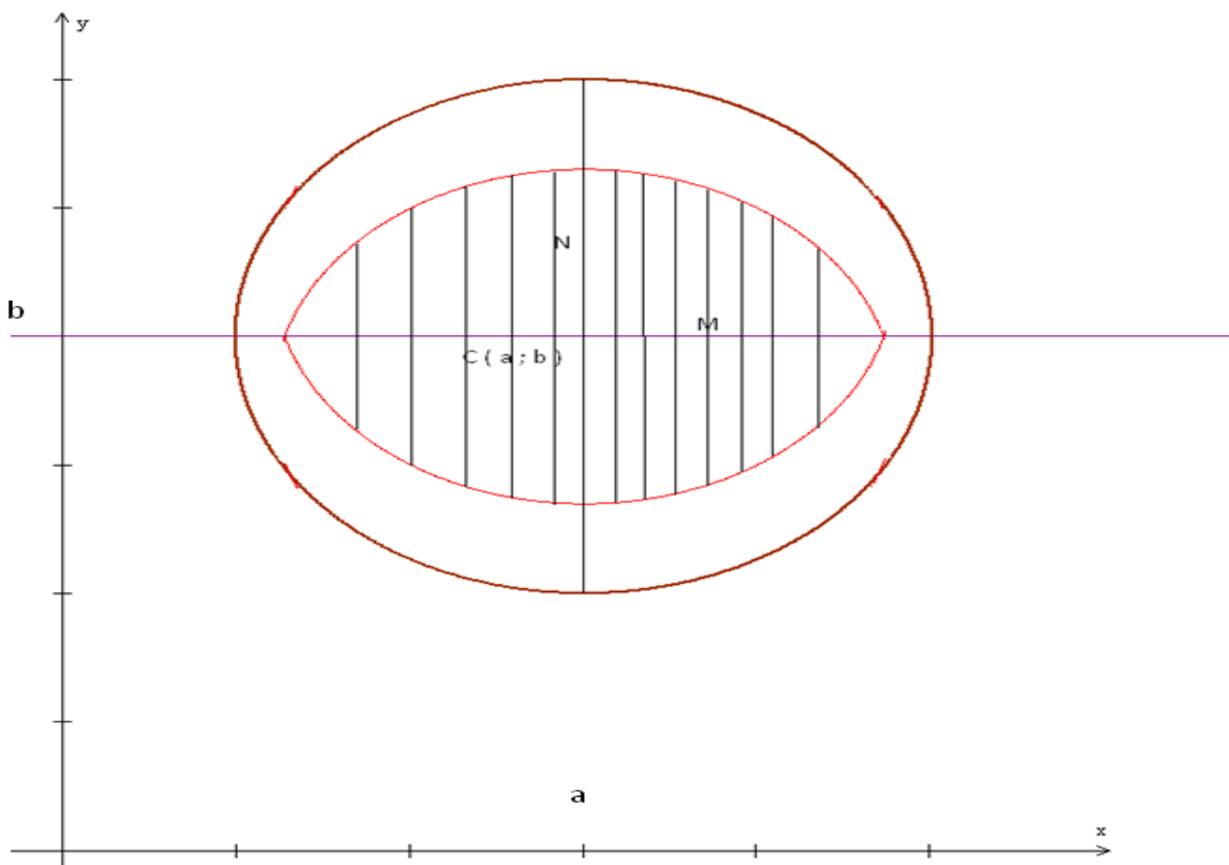
Toda a modelagem da Equação 8 partiu da hipótese de que a figura estaria construída numa circunferência de raio R e centro na origem, porém, a circunferência poderia ter um centro qualquer, que não necessariamente a origem do plano cartesiano. Portanto, faz-se necessário supor a folhóide construída em uma Circunferência de raio R e centro C (a;b). Consideremos a Figura 13. Façamos a semi-folhóide superior deslocar-se no sentido da semi-folhóide inferior e esta de encontro à semi-folhóide superior de

modo que o encontro do centro de ambas ocorram no centro da circunferência  $C(a; b)$ . Neste caso, obtemos a Figura 14.

**Figura 13** - Representação gráfica da semi-folhóide superior e semi-folhóide inferior numa circunferência de centro  $(a; b)$



**Figura 14** - Folhóide numa circunferência de centro  $(a; b)$



Na semi-folhóide superior temos que o seu centro é  $C_{F1}(a; b+R-N)$ , ou seja

$$C_{F1}(a; b+R-N)$$

$$C_{F1}\left(a; b + \frac{M^2 - N^2}{2N} - N\right) = \left(a; b + \frac{M^2 - N^2}{2N}\right) \rightarrow C_{F1}(a; b+q)$$

Aplicando esse ponto na equação da circunferência de raio “R” e Centro ( a; b ), obtemos a Equação 9.

$$EQ_{F1} = (X-a)^2 + (Y-(b+q))^2 = R^2$$

$$EQ_{F1} = (X-a)^2 + Y^2 - 2Y(b+q) + (b+q)^2 = p^2$$

$$EQ_{F1} = (X-a)^2 + Y^2 - 2Yb - 2Yq + b^2 + 2bq + q^2 = p^2$$

$$EQ_{F1} = (X-a)^2 + Y^2 - 2Yb + b^2 = p^2 - q^2 + 2Yq - 2bq$$

$$p^2 - q^2 = M^2$$

$$\therefore EQ_{F1} = (X-a)^2 + (Y-b)^2 = M^2 + 2q(Y-b) \quad (9)$$

Na semi-folhóide inferior o seu centro é  $C_{F2}(a; b-R+N)$ ,

$$C_{F2}(a; b-R+N)$$

$$C_{F2}\left(a; b - \left(\frac{M^2 + N^2}{2N}\right) + N\right) = \left(a; b - \left(\frac{M^2 - N^2}{2N}\right)\right) \rightarrow C_{F2}(a; b-q)$$

$$EQ_{F2} = (X-a)^2 + (Y-(b-q))^2 = p^2$$

$$EQ_{F2} = (X-a)^2 + Y^2 - 2Y(b-q) + (b-q)^2 = p^2$$

$$EQ_{F2} = (X-a)^2 + Y^2 - 2Yb + 2Yq + b^2 - 2bq + q^2 = p^2$$

$$EQ_{F2} = (X-a)^2 + Y^2 - 2Yb + b^2 = p^2 - q^2 + 2bq - 2Yq$$

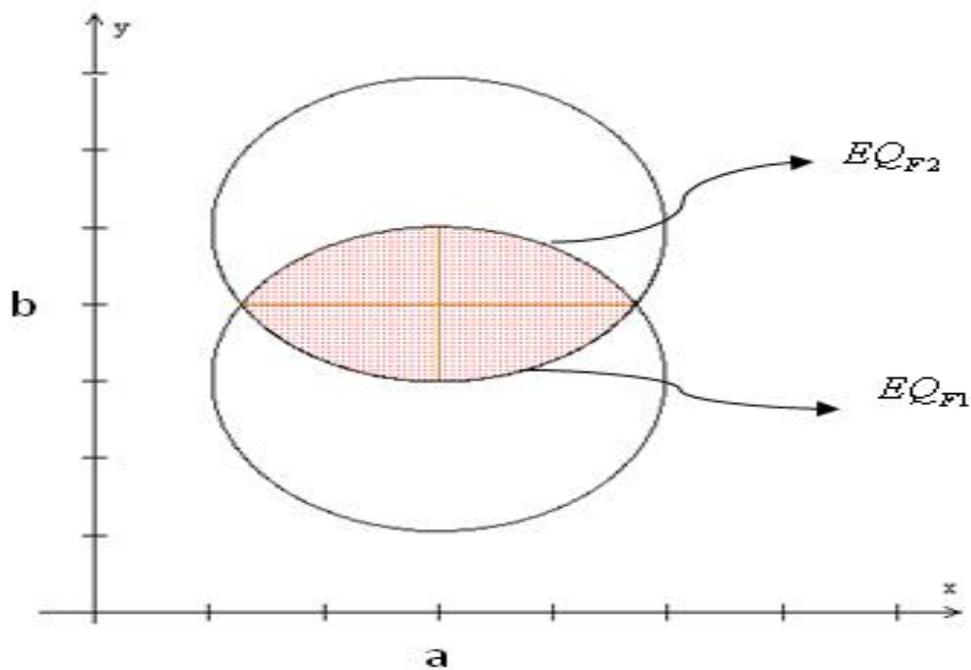
$$EQ_{F2} = (X-a)^2 + (Y-b)^2 = M^2 + 2q(b-Y)$$

$$\therefore EQ_{F2} = (X-a)^2 + (Y-b)^2 = M^2 - 2q(Y-b) \quad (10)$$

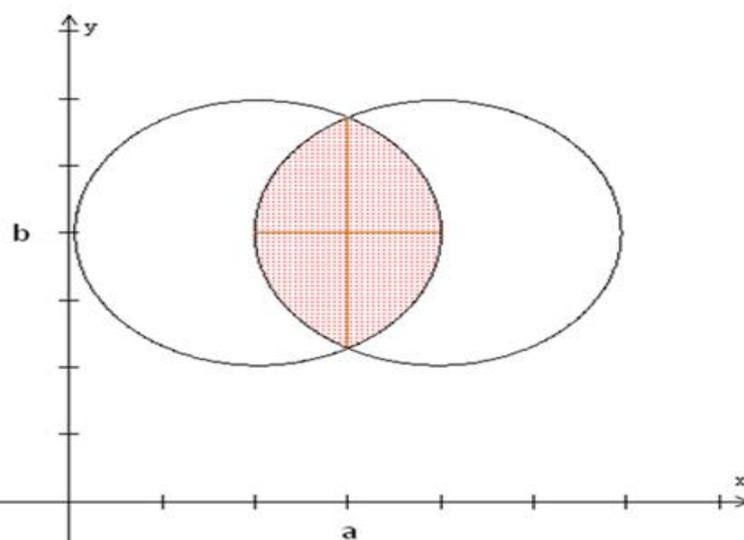
As Equações 9 e 10, juntas fornecem todos os pontos da folhóide no centro da circunferência C (a; b). Assim, a equação final da Folhóide é calculada pela Equação 11.

$$EQ_F = (X-a)^2 + (Y-b)^2 = M^2 \pm 2q(Y-b) \quad (11)$$

Tanto  $EQ_{F1}$ , como  $EQ_{F2}$  são equações de circunferências as quais dão origem à folhóide, devido à intersecção das regiões geradas no plano, como pode ser observado na Figura 15. As curvas que limitam a folhóide são arcos de circunferência.

**Figura 15** - Intersecção das superfícies da semi-folhóide inferior e superior

A equação da folhóide depende de certos intervalos, com a finalidade de assegurar sua confiabilidade. No eixo  $x$  esse intervalo é  $x \in [(a - M); (a + M)]$ , enquanto que no eixo  $y$  é  $y \in [(b - N); (b + N)]$ . A equação da folhóide é implícita nas variáveis  $x$  e  $y$ , sendo equivalente à equação de uma circunferência. Portanto, para cada valor de  $x$  haverá dois valores para  $y$  e vice-versa. Dessa forma, durante a utilização da equação da folhóide, os intervalos de confiabilidade devem ser sempre analisados para que seja possível saber se a coordenada que se está trabalhando pertence definitivamente a folhóide ou não. A equação da folhóide pode sofrer alteração em função da rotação produzida nos semi-eixos. Suponhamos que o eixo de origem da folhóide tenha sofrido uma rotação de  $90^\circ$  conforme mostra a Figura 16, na qual o semi-eixo maior continua sendo  $M$ , porém na vertical e o menor  $N$ , na horizontal. Como foi apenas o eixo que rotacionou, o centro da folhóide permanece com as mesmas coordenadas.

**Figura 16** - Folhóide com rotação de  $90^\circ$ 

Em relação à Figura 16, o centro da folhóide é:

$$C_{Fd} = (a + R - N; b) = \left( a + \frac{M^2 + N^2}{2N} - N; b \right)$$

$$C_{Fd} = \left( \left( a + \frac{M^2 - N^2}{2N} \right); b \right) \rightarrow C_{Fd}(a + q; b)$$

Colocando o valor de  $C_{Fd}$  na equação da circunferência de raio  $R$  e centro  $(a; b)$ , obtemos a Equação 12.

$$EQ_c = (X - a)^2 + (Y - b)^2 = R^2$$

$$EQ_{Fd} = (X - (a + q))^2 + (Y - b)^2 + (Y - b)^2 = p^2$$

$$EQ_{Fd} = X^2 - 2a^2X - 2qX + (a + q)^2 + (Y - b)^2 = p^2$$

$$EQ_{Fd} = X^2 - 2a^2X - 2qX + a^2 + 2aq + q^2 + (Y - b)^2 = p^2$$

$$EQ_{Fd} = X^2 - 2a^2X + a^2 + (Y - b)^2 = p^2 - q^2 - 2aq + 2qX$$

$$EQ_{Fd} = (X - a)^2 + (Y - b)^2 = M^2 + 2q(X - a)$$

$$\therefore EQ_{Fd} = (X - a)^2 + (Y - b)^2 = M^2 + 2q(X - a) \quad (12)$$

A Equação 12 possibilita estabelecer todos os pontos à direita da origem. A folhóide à esquerda possui como centro:

$$C_{Fe} = (a - R + N; b) = \left( a - \frac{M^2 - N^2}{2N} + N; b \right)$$

$$C_{Fe} = \left( a - \frac{M^2 + N^2}{2N}; b \right) \rightarrow C_{Fd} = \left( a - \left( \frac{M^2 - N^2}{2N} \right); b \right)$$

$$\therefore C_{Fe} = C_{Fd}(a - q; b)$$

Colocando o valor de  $C_{Fe}$  na equação da circunferência de raio  $R$  e centro  $(a; b)$ , obtemos a Equação 13. A Equação 13 possibilita estabelecer todos os pontos à esquerda da origem.

$$EQ_c = (X - a)^2 + (Y - b)^2 = R^2$$

$$EQ_{Fe} = (X - (a - q))^2 + (Y - b)^2 + (Y - b)^2 = p^2$$

$$EQ_{Fe} = X^2 - 2a^2X + 2qX + (a - q)^2 + (Y - b)^2 = p^2$$

$$EQ_{Fe} = X^2 - 2a^2X + 2qX + a^2 - 2aq + q^2 + (Y - b)^2 = p^2$$

$$EQ_{Fe} = X^2 - 2a^2X + a^2 + (Y - b)^2 = p^2 - q^2 - 2qX + 2aq$$

$$p^2 - q^2 = M^2$$

$$EQ_{Fe} = (X - a)^2 + (Y - b)^2 = M^2 - 2qX + 2aq$$

$$\therefore \text{EQ}_{\text{Fe}} = (X - a)^2 + (Y - b)^2 = M^2 - 2q(X - a) \quad (13)$$

As Equações 12 e 13, juntas fornecem todos os pontos da folhóide no centro da circunferência  $C(a; b)$ , com rotação de  $90^\circ$ . Assim, a equação final da Folhóide é calculada pela Equação 14.

$$\text{EQ}_{\text{Fd}} = (X - a)^2 + (Y - b)^2 = M^2 \pm 2q(X - a) \quad (14)$$

Assim como na folhóide de eixo maior horizontal, na de eixo maior vertical também se faz necessário determinar os limites de confiabilidade das equações. Observa-se que pela Figura 17, no eixo “X” esse intervalo é de:

$$X \in [(a - N); (a + N)]$$

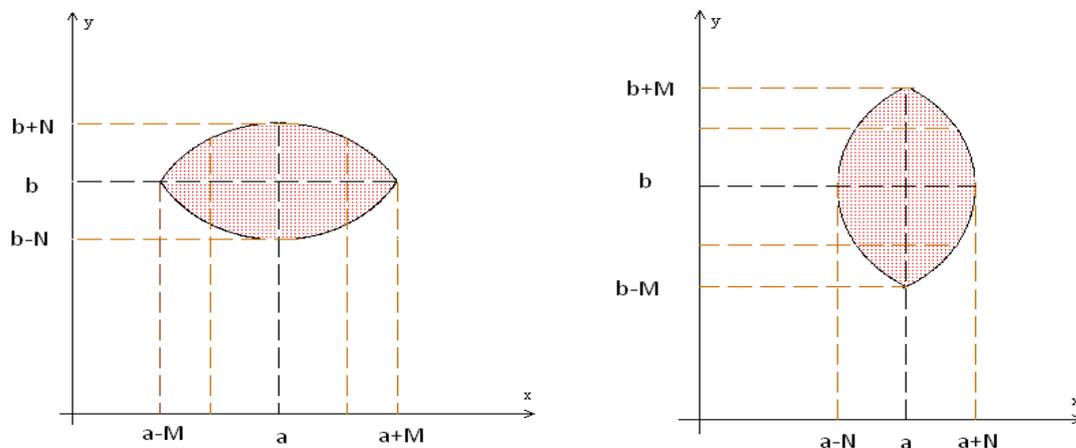
$$X \in [(a - N); (a + N)]$$

e no eixo “Y” é de:

$$Y \in [(b - M); (b + M)]$$

Como vimos, as equações da folhóide são implícitas nas variáveis “X” e “Y” e tanto na folhóide de eixo maior na vertical quanto na de eixo maior na horizontal, para cada ordenada “Y” há duas abscissas (“X”) correspondentes e distintas, porém simétrica em relação à abscissa central. E de igual modo, para cada abscissa “X” há duas ordenadas (“Y”) correspondentes, distintas e também simétricas, mas nesse caso à ordenada central.

**Figura 17** - Translação da folhóide.



### Determinação das coordenadas da superfície sendo dado uma coordenada

Como as equações da folhóide diferem a depender da posição na qual o eixo maior se encontre, na determinação das coordenadas existe a necessidade de considerar dois casos:

1º Caso: Determinação das coordenadas para a folhóide com eixo maior na horizontal.

2º Caso: Determinação das coordenadas para a folhóide com eixo maior na vertical.

1º Caso: Superfície com eixo maior na horizontal

**Determinação da equação que fornece todas as ordenadas da superfície superior em função de uma abscissa dada:**

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 = M^2 - 2q(Y - b)$$

$$Y^2 - 2Yb + b^2 + 2qY - 2qb = M^2 - (X - a)^2$$

$$Y^2 - Y(2b - 2q) + b^2 - 2qb - M^2 + (X - a)^2 = 0$$

$$\Delta = (2b - 2q)^2 - 4[b^2 - 2qb - M^2 + (X - a)^2]$$

$$\Delta = 4b^2 - 8bq + 4q^2 - 4b^2 + 8qb + 4M^2 - 4(X - a)^2$$

$$\Delta = \cancel{4b^2} - \cancel{8bq} + 4q^2 - \cancel{4b^2} + \cancel{8qb} + 4M^2 - 4(X - a)^2$$

$$\Delta = 4q^2 + 4M^2 - 4(X - a)^2 \longrightarrow Y = \frac{(2b - 2q) \pm \sqrt{4q^2 + 4M^2 - 4(X - a)^2}}{2}$$

$$\text{obs : } p^2 - q^2 = M^2$$

$$Y = \frac{(2b - 2q) \pm \sqrt{4q^2 + 4p^2 - 4q^2 - 4(X - a)^2}}{2}$$

$$Y = \frac{(2b - 2q) \pm \sqrt{4p^2 - 4(X - a)^2}}{2} \longrightarrow Y = \frac{(2b - 2q) \pm 2\sqrt{p^2 - (X - a)^2}}{2}$$

$$Y = (b - q) \pm \sqrt{p^2 - (X - a)^2}$$

Da forma que está teremos dois valores para a ordenada “Y”. Como se trata apenas da semi-folhóide superior, o correto é ter apenas um “Y” para cada “X” do intervalo  $a - M \leq X \leq a + M$ , ou seja, apenas um “Y” do intervalo  $b \leq Y \leq b + N$ , para cada “X” do intervalo  $a - M \leq X \leq a + M$ . Substituamos X na equação por seus valores limites para verificarmos qual das equações é verdadeira, pois como já sabemos para  $X = a + M$  ou  $X = a - M$  teremos sempre  $Y = b$ . Donde vem que:

Substituindo por:  $X = a + M$  ou  $X = a - M$  vem:

$$Y = (b - q) \pm \sqrt{p^2 - (X - a)^2}$$

$$Y = (b - q) \pm \sqrt{p^2 - (a + M - a)^2} \longrightarrow Y = (b - q) \pm \sqrt{p^2 - M^2}$$

ou

$$Y = (b - q) \pm \sqrt{p^2 - (a - M - a)^2} \longrightarrow Y = (b - q) \pm \sqrt{p^2 - M^2}$$

Resolvendo teremos:

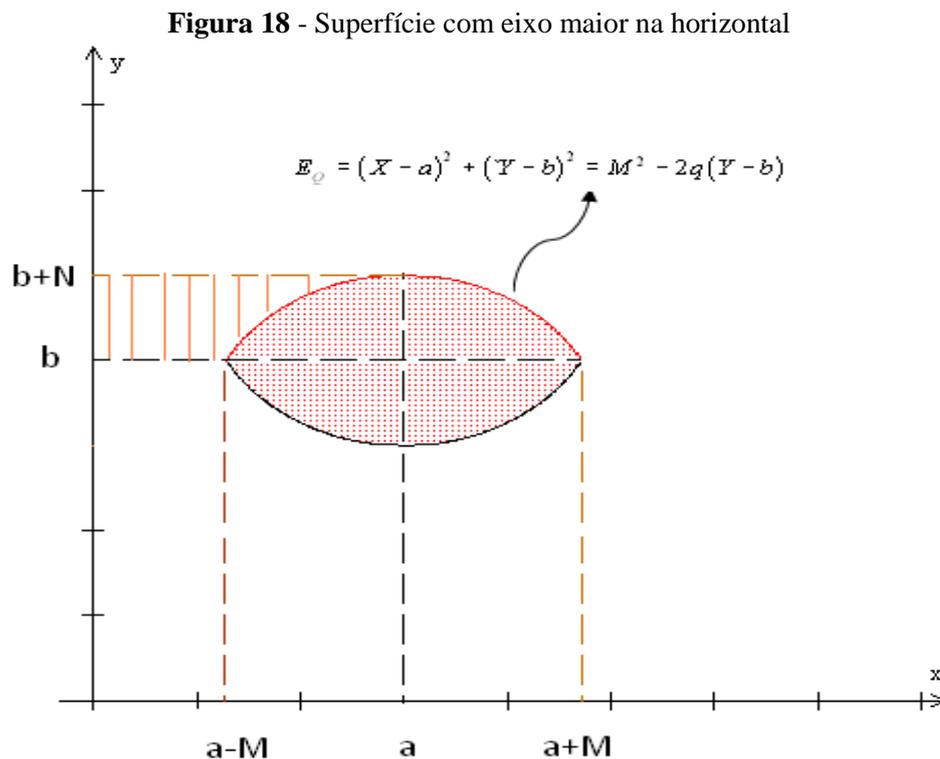
$$Y_1 = (b - q) + \sqrt{p^2 - (p^2 - q^2)} \longrightarrow Y_1 = (b - q) + \sqrt{q^2} \longrightarrow Y_1 = b$$

$$Y_2 = (b - q) - \sqrt{p^2 - (p^2 - q^2)} \longrightarrow Y_2 = (b - q) - \sqrt{q^2} \longrightarrow Y_2 = b + 2q$$

Logo, a equação verdadeira para todas as ordenadas da semi-folhóide superior é:

$$Y = (b - q) + \sqrt{p^2 - (X - a)^2}$$

Sendo firmada nos intervalos:  $b \leq Y \leq b + N$  e  $a - M \leq X \leq a + M$



**Determinação da equação que fornece todas as abscissas da semi-folhóide superior em função de uma ordenada dada:**

$$\begin{aligned}
 Y &= (b - q) + \sqrt{p^2 - (X - a)^2} \\
 Y - (b - q) &= \sqrt{p^2 - (X - a)^2} \longrightarrow [Y - (b - q)]^2 = \left[ \sqrt{p^2 - (X - a)^2} \right]^2 \\
 [Y - (b - q)]^2 &= p^2 - (X - a)^2 \longrightarrow p^2 - [Y - (b - q)]^2 = (X - a)^2 \\
 (X - a)^2 &= p^2 - [Y - (b - q)]^2 \longrightarrow (X - a) = \pm \sqrt{p^2 - [Y - (b - q)]^2} \\
 \boxed{X} &= \boxed{a \pm \sqrt{p^2 - [Y - (b - q)]^2}}
 \end{aligned}$$

Essa equação fornece todas as abscissas da semi-folhóide superior em função da ordenada “Y” e também está firmada nos intervalos:

$$\boxed{b \leq Y \leq b + N.} \quad \text{e} \quad \boxed{a - M \leq X \leq a + M}$$

Como já era de se esperar, os sinais  $\pm$  na equação, significa apenas que para cada ordenada “Y” haverá duas abscissas. Determinação da equação que fornece todas as ordenadas da semi-folhóide inferior em função de uma abscissa dada:

$$\begin{aligned}
 (X - a)^2 + (Y - b)^2 &= M^2 + 2q(Y - b) \\
 Y^2 - 2Yb - b^2 - 2qY - 2qb &= M^2 + (X - a)^2 \\
 Y^2 - Y(2b + 2q) + b^2 + 2qb - M^2 + (X - a)^2 &= 0 \\
 \Delta &= (2b - 2q) - 4[b^2 - 2qb - M^2 + (X - a)^2] \\
 \Delta &= 4b^2 + 8bq + 4q^2 - 4b^2 - 8qb + 4M^2 - 4(X - a)^2 \\
 \Delta &= \cancel{4b^2} + \cancel{8bq} + 4q^2 - \cancel{4b^2} - \cancel{8qb} + 4M^2 - 4(X - a)^2 \\
 \Delta &= 4q^2 + 4M^2 - 4(X - a)^2 \longrightarrow Y = \frac{(2b + 2q) \pm \sqrt{4q^2 + 4M^2 - 4(X - a)^2}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{obs : } p^2 - q^2 = M^2$$

$$Y = \frac{(2b + 2q) \pm \sqrt{4q^2 + 4p^2 - 4q^2 - 4(X - a)^2}}{2}$$

$$Y = \frac{(2b + 2q) \pm \sqrt{4p^2 - 4(X - a)^2}}{2} \longrightarrow Y = \frac{(2b + 2q) \pm 2\sqrt{p^2 - (X - a)^2}}{2}$$

$$Y = (b + q) \pm \sqrt{p^2 - (X - a)^2}$$

De igual modo como na folhóide superior, da forma que está, teremos dois valores para a ordenada “Y”. Como se trata apenas da semi-folhóide inferior, o correto é ter apenas um “Y” para cada “X” do intervalo  $a - M \leq X \leq a + M$ , ou seja, apenas um “Y” do intervalo  $b - N \leq Y \leq b$ , para cada “X” do intervalo  $a - M \leq X \leq a + M$ . Substituamos X na equação por seus valores limites para verificarmos qual das equações é verdadeira, pois como já sabemos para  $X = a + M$  ou  $X = a - M$  teremos sempre  $Y = b$ . Donde vem que:

Substituindo por:  $X = a + M$  ou  $X = a - M$  vem:

$$Y = (b + q) \pm \sqrt{p^2 - (X - a)^2}$$

$$Y = (b + q) \pm \sqrt{p^2 - (a + M - a)^2} \longrightarrow Y = (b + q) \pm \sqrt{p^2 - M^2}$$

ou

$$Y = (b + q) \pm \sqrt{p^2 - (a - M - a)^2} \longrightarrow Y = (b + q) \pm \sqrt{p^2 - M^2}$$

Resolvendo teremos:

$$Y_1 = (b + q) + \sqrt{p^2 - (p^2 - q^2)} \longrightarrow Y_1 = (b + q) + \sqrt{q^2} \longrightarrow Y_1 = b + 2q$$

$$Y_2 = (b + q) - \sqrt{p^2 - (p^2 - q^2)} \longrightarrow Y_2 = (b + q) - \sqrt{q^2} \longrightarrow Y_2 = b$$

Logo, a equação verdadeira para todas as ordenadas da semi-folhóide inferior é:

$$Y = (b + q) - \sqrt{p^2 - (p^2 - q^2)}$$

Sendo firmado nos intervalos:  $b - N \leq Y \leq b$  e  $a - M \leq X \leq a + M$

**Determinação da equação que fornece todas as abscissas da semi-folhóide inferior em função de uma ordenada dada:**

$$Y = (b + q) - \sqrt{p^2 - (X - a)^2}$$

$$Y - (b + q) = -\sqrt{p^2 - (X - a)^2} \longrightarrow [(b + q) - Y]^2 = \left[ \sqrt{p^2 - (X - a)^2} \right]^2$$

$$[(b + q) - Y]^2 = p^2 - (X - a)^2 \longrightarrow p^2 - [(b + q) - Y]^2 = (X - a)^2$$

$$(X - a)^2 = p^2 - [(b + q) - Y]^2 \longrightarrow (X - a) = \pm \sqrt{p^2 - [(b + q) - Y]^2}$$

$$X = a \pm \sqrt{p^2 - [(b + q) - Y]^2}$$

Essa equação fornece todas as abscissas da semi-folhóide inferior em função da ordenada “y” e também está firmada nos intervalos:

$$\boxed{b - N \leq Y \leq b} \quad \text{e} \quad \boxed{a - M \leq X \leq a + M}$$

Como já era de se esperar, assim como na semi-folhóide superior, aqui o  $\pm$  na equação, também significa apenas que para cada ordenada “Y” haverá duas abscissas distintas, porém simétricas em relação a abscissa central.

**2º Caso:** folhóide com eixo maior na vertical

**Determinação da equação que fornece todas as abscissas da semi-folhóide a direita do centro da folhóide em função de uma ordenada dada:**

$$\begin{aligned} (X - a)^2 + (Y - b)^2 &= M^2 + 2q(X - a) \\ X^2 - 2Xa + a^2 - 2qX + 2qa &= M^2 - (Y - b)^2 \\ X^2 - X(2a + 2q) + a^2 + 2qa - M^2 + (y - b)^2 &= 0 \\ \Delta &= (2a - 2q)^2 - 4[a^2 - 2qa - M^2 + (Y - b)^2] \\ \Delta &= 4a^2 + 8aq + 4q^2 - 4a^2 - 8qa + 4M^2 - 4(Y - b)^2 \\ \Delta &= \cancel{4a^2} + 8aq + 4q^2 - \cancel{4a^2} - 8qa + 4M^2 - 4(Y - b)^2 \\ \Delta &= 4q^2 + 4M^2 - 4(X - a)^2 \longrightarrow X = \frac{(2a + 2q) \pm \sqrt{4q^2 + 4M^2 - 4(Y - b)^2}}{2} \\ \text{obs: } p^2 - q^2 &= M^2 \\ X &= \frac{(2a + 2q) \pm \sqrt{4q^2 + 4p^2 - 4q^2 - 4(Y - b)^2}}{2} \\ X &= \frac{(2a + 2q) \pm \sqrt{4p^2 - 4(Y - b)^2}}{2} \longrightarrow X = \frac{(2a + 2q) \pm 2\sqrt{p^2 - (Y - b)^2}}{2} \\ X &= (a + q) \pm \sqrt{p^2 - (Y - b)^2} \end{aligned}$$

Da forma que está teremos dois valores para a abscissa “X”. Como se trata apenas da semi-folhóide a direita, o correto é ter apenas um “X” para cada “Y” do intervalo  $b - M \leq Y \leq b + M$ , ou seja, apenas um “X” do intervalo  $a \leq X \leq a + N$ , para cada “Y” do intervalo  $b - M \leq Y \leq b + M$ . Substituamos Y na equação por seus valores limites para verificarmos qual das equações é verdadeira, pois como já sabemos para  $Y = b + M$  ou  $Y = b - M$  teremos sempre  $X = a$ . Donde vem que:

Substituindo por:  $Y = b + M$  ou  $Y = b - M$  vem:

$$\begin{aligned} Y &= (a + q) \pm \sqrt{p^2 - (Y - b)^2} \\ Y &= (a + q) \pm \sqrt{p^2 - (b + M - b)^2} \longrightarrow Y = (a + q) \pm \sqrt{p^2 - M^2} \\ \text{ou} \\ Y &= (a + q) \pm \sqrt{p^2 - (b - M - b)^2} \longrightarrow Y = (a + q) \pm \sqrt{p^2 - M^2} \end{aligned}$$

Resolvendo teremos:

$$Y_1 = (a + q) + \sqrt{p^2 - (p^2 - q^2)} \longrightarrow Y_1 = (a + q) + \sqrt{q^2} \longrightarrow Y_1 = a + 2q$$

$$Y_2 = (a + q) - \sqrt{p^2 - (p^2 - q^2)} \longrightarrow Y_2 = (a + q) - \sqrt{q^2} \longrightarrow Y_2 = a$$

Logo, a equação verdadeira para todas as ordenadas da semi-folhóide a direita é:

$$Y = (a + q) - \sqrt{p^2 - (Y - b)^2}$$

Sendo firmada nos intervalos:  $b - M \leq Y \leq b + M$  e  $a \leq X \leq a + N$

**Determinação da equação que fornece todas as ordenadas da semi-folhóide a direita do centro em função de uma abscissa dada:**

$$X = (a + q) - \sqrt{p^2 - (Y - b)^2}$$

$$X - (a + q) = -\sqrt{p^2 - (Y - b)^2} \longrightarrow [(a + q) - X]^2 = [\sqrt{p^2 - (Y - b)^2}]^2$$

$$[(a + q) - X]^2 = p^2 - (Y - b)^2 \longrightarrow p^2 - [(a + q) - X]^2 = (Y - b)^2$$

$$(Y - b)^2 = p^2 - [(a + q) - X]^2 \longrightarrow (Y - b) = \pm \sqrt{p^2 - [(a + q) - X]^2}$$

$$Y = b \pm \sqrt{p^2 - [(a + q) - X]^2}$$

Essa equação fornece todas as ordenadas da semi-folhóide à direita do centro em função da abscissa “X” e também está firmada nos intervalos:

$$a \leq X \leq a + N \text{ e } b - M \leq Y \leq b + M$$

Como já era de se esperar, os sinais  $\pm$  na equação, significa apenas que para cada abscissa “X” haverá duas ordenadas correspondentes.

**Determinação da equação que fornece todas as abscissas da semi-folhóide a esquerda do centro em função de uma ordenada dada:**

$$\begin{aligned} (X-a)^2 + (Y-b)^2 &= M^2 - 2q(X-a) \\ X^2 - 2Xb + a^2 + 2qX - 2qa &= M^2 - (Y-b)^2 \\ X^2 - X(2a-2q) + a^2 - 2qa - M^2 + (Y-b)^2 &= 0 \\ \Delta &= (2a-2q)^2 - 4[a^2 - 2qa - M^2 + (Y-b)^2] \\ \Delta &= 4a^2 - 8aq + 4q^2 - 4a^2 + 8qa + 4M^2 - 4(Y-b)^2 \\ \Delta &= \cancel{4a^2} - \cancel{8ba} + 4q^2 - \cancel{4a^2} + \cancel{8qa} + 4M^2 - 4(Y-b)^2 \\ \Delta = 4q^2 + 4M^2 - 4(Y-b)^2 &\longrightarrow X = \frac{(2a-2q) \pm \sqrt{4q^2 + 4M^2 - 4(Y-b)^2}}{2} \\ \text{obs: } p^2 - q^2 &= M^2 \\ X &= \frac{(2a-2q) \pm \sqrt{4q^2 + 4p^2 - 4q^2 - 4(Y-b)^2}}{2} \\ X = \frac{(2a-2q) \pm \sqrt{4p^2 - 4(Y-b)^2}}{2} &\longrightarrow X = \frac{(2a-2q) \pm 2\sqrt{p^2 - (Y-b)^2}}{2} \\ X &= (a-q) \pm \sqrt{p^2 - (Y-b)^2} \end{aligned}$$

Da forma que está teremos dois valores para a abscissa “X”. Como se trata apenas da semi-folhóide a esquerda, o correto é ter apenas um “X” para cada “Y” do intervalo  $b-M \leq Y \leq b+M$ , ou seja, apenas um “X” do intervalo  $a-N \leq X \leq a$ , para cada “Y” do intervalo  $b-M \leq Y \leq b+M$ . Substituamos Y na equação por seus valores limites para verificarmos qual das equações é verdadeira, pois como já sabemos para  $Y = b+M$  ou  $Y = b-M$  teremos sempre  $x = a$ . Donde vem que:

Substituindo por:  $Y = b+M$  ou  $Y = b-M$  vem:

$$\begin{aligned} X &= (a-q) \pm \sqrt{p^2 - (Y-b)^2} \\ X &= (a-q) \pm \sqrt{p^2 - (b+M-b)^2} \longrightarrow X = (a-q) \pm \sqrt{p^2 - M^2} \\ \text{ou} \\ X &= (a-q) \pm \sqrt{p^2 - (b-M-b)^2} \longrightarrow X = (a-q) \pm \sqrt{p^2 - M^2} \end{aligned}$$

Resolvendo teremos:

$$\begin{aligned} X_1 &= (a-q) + \sqrt{p^2 - (p^2 - q^2)} \quad X_1 = (b-q) + \sqrt{q^2} \longrightarrow X_1 = a \\ X_2 &= (a-q) - \sqrt{p^2 - (p^2 - q^2)} \longrightarrow X_2 = (a-q) - \sqrt{q^2} \longrightarrow X_2 = a + 2q \end{aligned}$$

Logo, a equação verdadeira para todas as ordenadas da semi-folhóide superior é:

$$X = (a - q) + \sqrt{p^2 - (Y - b)^2}$$

Sendo firmada nos intervalos:

$$a - N \leq X \leq a.$$

e

$$b - M \leq Y \leq b + M$$

**Determinação da equação que fornece todas as ordenadas da semi-folhóide a esquerda do centro em função de uma abscissa dada:**

$$X = (a - q) + \sqrt{p^2 - (Y - b)^2}$$

$$X - (a - q) = \sqrt{p^2 - (Y - b)^2} \longrightarrow [X - (a - q)]^2 = [\sqrt{p^2 - (Y - b)^2}]^2$$

$$[X - (a - q)]^2 = p^2 - (Y - b)^2 \longrightarrow p^2 - [X - (a - q)]^2 = (Y - b)^2$$

$$(Y - b)^2 = p^2 - [X - (a - q)]^2 \longrightarrow (Y - b) = \pm \sqrt{p^2 - [X - (a - q)]^2}$$

$$Y = b \pm \sqrt{p^2 - [X - (a - q)]^2}$$

Essa equação fornece todas as ordenadas da semi-folhóide a esquerda do centro em função da abscissa “X” e também está firmada nos intervalos:

$$a - N \leq X \leq a.$$

e

$$b - M \leq Y \leq b + M$$

Como já era de se esperar, os sinais  $\pm$  na equação, significa apenas que para cada abscissa “X” haverá duas ordenadas correspondentes.

## CONCLUSÃO

A folhóide é uma figura plana concêntrica à circunferência que lhe dá origem, regida analiticamente por duas equações de circunferências as quais são distintas entre si. A distância entre os centros das circunferências da qual resulta as equações da folhóide é de  $2q$ . As equações nas quais a folhóide estudada está subordinada, somente possuem validade para certos intervalos de confiança preestabelecido. As equações encontradas são válidas apenas quando a folhóide se apresenta de duas maneiras: com eixo maior na vertical ou com eixo maior na horizontal. As soluções analíticas da folhóide apresentadas no presente trabalho servirão de referências para que outros estudos sobre superfície não simétricas sejam realizados.

## REFERÊNCIAS

CORREIA, R.C., ARAÚJO, J.L., CAVALCANTI, E.B. A Fruticultura como vetor de desenvolvimento: o caso dos municípios de Petrolina (PE) e Juazeiro (BA). In: CONGRESSO BRASILEIROS DE ECONOMIA E SOCIOLOGIA RURAL, 38. *Anais...* Brasília: SOBER, 2000. CD-ROM

D'AMBROSIO, B.S. **Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates**. SBEM. Ano II. n2. Brasília. 1989. p. 15-19.

GRAVINA, M.A.; SANTAROSA, L.M. **A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados**. IV Congresso RIBIE, Brasília. 1998. p.1-24.

HEATH, R. **Geometria sagrada e as origens da civilização**. São Paulo: Pensamento, 2013. 247 p.

OGLIARI, L.N. **A Matemática no Cotidiano e na Sociedade**: Perspectivas do Aluno de Ensino Médio - parte de uma pesquisa de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática PUCRS. Porto Alegre. 2007. p.1-15.