UMA CONDIÇÃO NECESSÁRIA E SUFICIENTE PARA RESOLUBILIDADE EM C^{∞} DE OPERADORES DIFERENCIAIS PARCIAIS

ONOFRE, Júlio César de Jesus[1]

RESUMO: No estudo de operadores diferenciais parciais temos um grande interesse em saber se dado um operador diferencial este será ou não, resolúvel. Dentro desta ótica, neste trabalho, apresento um importante resultado devido a Harvey que nos dá uma condição necessária e suficiente para resolubilidade de EDP's em C^{∞}. Será demonstrado uma proposição decorrente deste teorema, que nos garanta uma condição necessária envolvendo soluções singulares do operador transposto para resolubilidade em C^{∞}do operador. Neste trabalho será apresentada também uma classe de exemplos de operadores não resolúveis, conclusão esta dada pelo teorema.

INTRODUÇÃO

No estudo de operadores diferenciais parciais temos um grande interesse em verificar quando um operador diferencial parcial é, ou não resolúvel. Neste trabalho estudaremos alguns resultados de grande importância no que diz respeito a esta questão de resolubilidade. Isto será feito começando com uma introdução na teoria dos Espaços de Sobolev onde será provado um resultado que calcula a ordem de distribuições pertencentes a estes espaços. Feito isso, enunciaremos um importante teorema devido a Harvey que nos dá uma condição necessária e suficiente para a resolubilidade de Equações Diferenciais Parciais no espaço das funções definidas num aberto Ω e infinitamente diferenciáveis ($C^{\infty}(\Omega)$). Será provado uma proposição que nos garanta uma condição necessária envolvendo soluções singulares do operador transposto para a resolubilidade em $C^{\infty}(\Omega)$ do operador, e finalizando, será dado uma classe de exemplos de operadores diferenciais parciais que não são resolúveis em $C^{\infty}(\Omega)$.

1 ESPAÇOS DE SABOLEV $H^{S}(\Omega)$

1.1 DEFINIÇÃO

Se s é um número real, definimos H^{s} como sendo o espaço das distribuições temperadas u em R^{n} , cuja transformada de Fourier $\hat{u}(\xi)$)($= u(e^{-i<.,\xi>}))$ é uma função de quadrado integrável com respeito a medida.

[1]E-mail: jcjo@netsite.com.br

$$(1 + |\xi|^2)^s \, d\xi$$

onde ξ é a variável em R^n com respeito a transformada de Fourier. Equipamos H^s com o produto interno

$$(u, v)_s = \int \hat{u}(\xi)\, \overline{\hat{v}(\xi)}\, (1 + |\xi|^2)^s \, d\xi$$

e com a norma associada

$$\|u\|_s = \left(\int_{R^n} |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s \, d\xi\right)^{1/2}$$

Isto torna H^s um espaço de Hilbert (Ver [T] – pág. 59).

1.2 DEFINIÇÃO

Definimos $H^s_{loc}(\Omega)$ como o subespaço das distribuições tais que $\varphi u \in H^s(R^n)$, $\forall \varphi \in C_o^\infty(\Omega)$.

1.2 POPOSIÇÃO

Se $u \in \epsilon(\Omega)$ Є e u admite extensão contínua para $H^s(\Omega)$ então u e de ordem finita.

Demonstração: Temos, por hipótese, que existe $u_o \in H^s(\Omega)$ tal que

$$u(\varphi) = \int \hat{u}_o(\xi)\, \overline{\hat{\varphi}(\xi)}\, (1 + |\xi|^2)^s \, d\xi, \quad \forall \varphi \in H^s(\Omega)$$

Logo, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$/u(\varphi)| \leq \|u_o\| \, \varphi \|_s, \quad \forall u \in H^s(\Omega)$$

Tome k inteiro positivo tal que k > s, logo

$$\|\varphi\|_s \leq \|\varphi\|_k$$

Nestas condições, tome R suficientemente grande tal que $S(u) \subset B_R(O)$. E daí, considere tal que $S(\varphi) \subset B_R(O)$.

Finalmente observemos que

$$\|\varphi^{(\alpha)}\|_o \leq C \, \|\varphi^{(\alpha)}\|_\infty \, R^{n/2}$$

Mas

$$\|\varphi\|^2 = \int |\ (\xi)\ |^2 (\mathbf{1} + |\xi|^2)^k \, d\xi \leq \int |\ (\xi)\ |^2 \ (\mathbf{1} + |\xi|)^{2k} \, d\xi = \int |\ (I-\Delta)^k \varphi\ |^2 dx \leq$$

$$\leq \sum \frac{k!}{j!(k-j)!} \int |\ \Delta^f \ \varphi\ |^2 \ dx$$

E pela desigualdade anterior teremos

$$\|\varphi\| \leq \sum \frac{k!}{j!(k-j)!} \ CR^{n/2} \ \|\Delta^j \varphi\|_\infty \leq \hat{C}p_{2k}\,(\varphi)$$

E portanto ord (u) $\leq$ 2 k.

2 CONDIÇÃO NECESSÁRIA E SUFICIENTE PARA RESOLUBILIDADE DE OPERADORES DIFERENCIAIS PARCIAIS EM $C^\infty(\Omega)$.

Iniciamos esta seção nos referindo a um teorema devido a C. Harvey, a saber:

2.1 TEOREMA:

A aplicação linear contínua

$$P : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$$

é sobrejetora se, e somente se, a seguinte condição for satisfeita:

Dados $K \subset \Omega$ compacto e s um número real, então existem $K'' \subset \Omega$ compacto, t um número real

e $B > 0$ tais que se $u \in \epsilon'(\Omega)$,

$$^tPu \in H^s \ e \ S(^tPu) \subset K$$

então

$$S(u) \subset K', u \in H' \ e \ \|u\|_t \leq B \ \|^t Pu\|_s$$

Demonstração: Ver [T] – pág. 61.

2.2 PROPOSIÇÃO

Seja P um operador diferencial parcial tal que $\exists K \subset\subset \Omega$ e $u_n \in D'(\Omega)$ com $^tPu_n \in C^\infty(\Omega)$, SS $(u_n) \subseteq$ e ord $(u_n) \geq n$. Então $P(C^\infty) \neq C^\infty$, isto é, P não é resolúvel.

Demonstração

Tome $\varphi \in C_o^\infty$ tal que $\varphi \equiv 1$ numa vizinhança de K, logo $v_n = \varphi u m$ é de suporte compacto e satisfaz as mesmas hipóteses que $\{u_n\}$ e em adição teremos que $v_n \in \epsilon$. Suponha que $P\,(C^\infty) = C^\infty$, assim pelo teorema anterior tomando $K = S\,(\varphi)$ e $s = 0$ obtemos que ${}^t P v_n \in H^o$ e $S\,({}^t P v_n) \subseteq K$

Logo se existisse K' e t nas condições do teorema obteríamos $v_n \in H^t \cap \epsilon\ \forall n$, o que nos daria uma contradição.

2.3 EXEMPLOS

Considere o operador $$L = mx \frac{\partial}{\partial x} + ny \frac{\partial}{\partial y} + \alpha$$

Daremos condições suficientes para que o operador P tal que ${}^t P = L$ não seja resolúvel em $C^\infty(\Omega)$, onde Ω é qualquer aberto de R^2 contendo a origem. Tome $u_{kj} = \delta_x^{(k)} \otimes \delta_x^{(j)}$, assim teremos:

$$L\,(u_{k,j}) = \left(mx \frac{\partial}{\partial x} + ny \frac{\partial}{\partial y} + \alpha \right) \left(\delta_x^{(k)} \otimes \delta_x^{(j)} \right) =$$
$$= [\, m\,(-(k+1)) + n\,(-(j+1)) + \alpha \,]\ \delta_x^{(k)} \otimes \delta_x^{(j)}$$

Tal operador P e a seqüência de distribuições $\{ u_{k,j} \}$ estão nas condições da proposição anterior sempre que existirem $k, j \in$ N arbitrariamente grandes tais que $-mk - nj + \alpha = 0$.
Por exemplo, este é o caso quando $m = 2$, $n = -1$ e $\alpha = 1$.

REFERÊNCIAS

HORMANDER, H. **Linear partial differential operators.** Springer-Verlag, Berlin, 1969. v.1.

ONOFRE, J. C. J. **Resolubilidade para operadores diferenciais:** condições necessárias. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de São Carlos, 2002.

TREVES, F. **Locally convexsSpaces and linear partial differential equations.** Springer-Verlag: Berlin, 1967.